ساده کردن عبارتهای توان‌دار

به نام خدا

در این جلسه مبحث اعداد توان‌دار رو ادامه میریم.

چیزی که اینجا باید یاد بگیریم اینه که چطوری باید عبارتهای توان‌دار رو ساده کنیم، یعنی اگه چند تا عدد توان‌دار در هم ضرب شده بودن ، جواب چطوری به دست میاد ؟

ما در ۲ حالت می‌تونیم دو تا عبارت توان‌دار رو در هم ضرب کنیم:

حالت اول: پایه‌ها با هم برابر باشن

حالت دوم: توانها با هم برابر باشن

حالت اول رو بررسی می‌کنیم:

دو عدد توان‌دار با پایه‌های مساوی به چه صورت ضرب میشن؟

یکی از پایه‌ها رو می‌نویسیم و توانها رو با هم جمع می‌کنیم.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

چند تا مثال ببینیم:

$2^5 \times 2^7 =$

اینجا پایه‌ها با هم برابرن، یکی از پایه‌ها رو می‌نویسیم(یعنی ۲) و توانها رو با هم جمع می‌کنیم:

$$2^5 \times 2^7 = 2^{5+7} = 2^{12}$$

جواب این ضرب به دست اومد.

حالا میخوام بهتون بگم علت اینکه می‌گیم توانها باید با هم جمع بشن چیه؟ همین ضرب مثال قبل رو در نظر بگیرید:

$$2^5 \times 2^7 =$$

2^5 یعنی چی؟ یعنی ۲ باید به تعداد ۵ بار در خودش ضرب بشه. پس:

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

2^7یعنی چی؟ یعنی ۲ باید به تعداد ۷ بار در خودش ضرب بشه. پس:

$$2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

حالا این دو مقدار رو جایگزین می‌کنیم:

$$2^5 \times 2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

اگه این ضرب گسترده رو بخوایم به صورت عدد تواندار بنویسیم، چی می‌نویسیم؟

۲ چند بار در خودش ضرب شده؟ ۱۲ بار . پس این ضرب برابره با:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{12}$$

بنابراین:

$$2^5 \times 2^7 = 2^{12}$$

پس متوجه شدیم چرا در ضرب دو عدد تواندار با پایه‌های مساوی، باید توانها رو با هم جمع کنیم.

مثال بعد:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{6} \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{4} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{6+4} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{10}$$

حالت دوم: ضرب اعداد توان‌دار با توانهای مساوی

در این حالت یکی از توانها رو می‌نویسیم و پایه‌ها رو در هم ضرب می‌کنیم.

مثال:

$$x^3 \times y^3 =$$

اینجا توانها برابر هستن پس یکی از توانها رو می‌نویسیم و پایه‌ها رو در هم ضرب می‌کنیم:

$$x^3 \times y^3 = (xy)^3$$

یه مثال دیگه:

$$5^4 \times 3^4 = (5 \times 3)^4 = 15^4$$

در اینجا هم میخوایم بدونیم چرا در ضرب اعداد توان‌دار با توانهای مساوی، باید پایه‌ها رو در هم ضرب کنیم. مثال قبل رو در نظر بگیرید:

$$5^4 \times 3^4 =$$

ضرب رو به صورت گسترده می‌نویسیم:

$$5^4 \times 3^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

۴ تا ۵ داریم و ۴ تا ۳ . میایم اینا رو به صورت جفت جفت می‌نویسیم:

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 =$$

$$(5 \times 3) \times (5 \times 3) \times (5 \times 3) \times (5 \times 3)$$

حالا چی داریم؟ (5×3) به تعداد ۴ بار در خودش ضرب شده، پس می‌تونیم به صورت یه عودد توان‌دار با توان ۴ بنویسیمش:

$$(5 \times 3) \times (5 \times 3) \times (5 \times 3) \times (5 \times 3) = (5 \times 3)^4$$

بنابراین:

$$5^4 \times 3^4 = (5 \times 3)^4 = 15^4$$

پس یاد گرفتیم که چرا در ضرب اعداد توان‌دار با توانهای مساوی، باید پایه‌ها رو در هم ضرب کنیم.

مثال بعد:

$$(ab)^5 \times a^3 \times b^4 =$$

اینجا نه پایه برابر داریم نه توان برابر، در حالیکه ما فقط در صورتی که پایه‌ها یا توانها با هم برابر باشن می‌تونیم ضرب رو انجام بدیم، پس باید ساده کنیم.

توانی که بالای پرانتز هست متعلق به همه عضوای داخل پرانتزه ،یعنی:

$$(ab)^5 = a^5 \times b^5$$

اینو جایگزین می‌کنیم:

$(ab)^5 \times a^3 \times b^4 = a^5 \times b^5 \times a^3 \times b^4 =$

حالا دو تا عددی که پایه‌شون a هست رو در هم ضرب می‌کنیم و دو عددی که پایه شون b هست رو در هم:

$a^5 \times b^5 \times a^3 \times b^4 = a^{5+3} \times b^{5+4} = a^8 \times b^9 = a^8 b^9$

حل تمرین صفحه ۹۲

ساده کردن عبارتهای توان‌دار

تمرین

۱ـ در تساوی‌های زیر به‌جای a و b و c عددهای مختلفی قرار دهید و تساوی‌های عددی بسازید.

$a^c \times b^c = (a \times b)^c$ $\qquad$ $a^b \times a^c = a^{b+c}$

به جای a , b , c اعداد زیر رو قرار میدیم:

$a = 2 \ , b = 3 \ , c = 1$

$2^3 \times 2^1 = 2^{3+1} \ \rightarrow \ 8 \times 2 = 16 \rightarrow 16 = 16$

قسمت بعد:

$2^1 \times 3^1 = (2 \times 3)^1 \ \rightarrow 2 \times 3 = 2 \times 3 \ \rightarrow 6 = 6$

۲ـ با استفاده از تجزیه به عددهای اول، هر عدد را به‌صورت توان‌دار بنویسید.

۱۰۰۰۰ = $\qquad$ ۴۴۱= $\qquad$ ۲۵۶= $\qquad$ ۱۲۱=

$121 = 11 \times 11 = 11^2$

$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$

$441 = 7 \times 7 \times 9 = 7^2 \times 9$

$10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

۳ـ مسئله‌هایی طرح کنید که پاسخ آنها : الف) $۲^۳$ ب) ۲×۳ ج) $۵^۲$ باشد.

الف: حجم مکعبی به ضلع ۲ را به دست آورید.

ب: مساحت مستطیلی به اضلاع ۲ و ۳ را به دست آورید.

ج: مساحت مربعی به ضلع ۵ را به دست آورید.

ادامه تمرینها رو می‌تونید در **"کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال"** ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

جذر و ریشه

تا اینجا با توان آشنا شدیم و یاد گرفتیم مفهوم به توان رسوندن یه عدد چیه.

در این قسمت میخوایم با مفهوم جذر و ریشه آشنا بشیم.

اگه یه عدد رو به توان ۲ برسونیم، به عددی که به دست میاد مجذور میگیم.

مثلا

$3^2 = 9$

در اینجا عدد ۹ مجذور عدد ۳ هست.

$5^2 = 25$

در اینجا ۲۵ مجذور عدد ۵ هست.

حالا جذر یا ریشه چیه؟

فرض کنید عدد ۲۵ رو به ما میدن و از ما میپرسن که چه عددی به توان ۲ رسیده که شده ۲۵ ؟ و ما جواب میدیم ۵ یا ۵-

به این دو تا عدد ریشه های عدد ۲۵ میگیم، یعنی اگه این دو عدد به توان ۲ برسن، حاصلشون برابر ۲۵ میشه.

در تساوی $۹ = ۳^۲$، عدد ۹ را توان دوم یا مجذور عدد ۳ و عدد ۳ را نیز **ریشهٔ دوم** یا **جذر** ۹ می‌نامند.

توجه داشته باشید که ۵ و ۵- هر دو ریشه دوم عدد ۲۵ هستن ولی جذر عدد ۲۵ فقط ۵ هست نه ۵-.

پس: هر عدد دو تا ریشه دوم داره که قرینه همدیگه هستن

از بین اون دو تا ریشه، اونی که مثبته، جذر عدد هست.

نمادی که برای نشون دادن ریشه دوم مثبت ازش استفاده می‌کنیم رادیکال نام داره و به این صورته:

$\sqrt{}$

مثلا وقتی میخوایم نشون بدیم که جذر عدد ۲۵ برابر ۵ میشه، این رو به صورت زیر می‌نویسیم:

$\sqrt{25} = 5$

توان دوم یا مجذور عدد ۳ را با 3^2 و توان دوم یا مجذور عدد ۳- را با $(-3)^2$ نمایش می‌دهیم. برای نمایش ریشهٔ دوم مثبت از نماد $\sqrt{}$ (بخوانید رادیکال) استفاده می‌کنیم.

ریشه‌های دوم عدد ۹ را با $\sqrt{9}$ و $-\sqrt{9}$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر $\sqrt{9} = 3$ و $-\sqrt{9} = -3$

جذر تقریبی

حالا میخوایم یاد بگیریم که چطور جذر تقریبی اعداد رو به دست بیاریم.

می‌دونیم که بعضی از عددها اگه ازشون جذر بگیریم، جذرشون یه عدد طبیعی میشه، مثل اعداد زیر:

۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶، ۴۹، ۶۴، ۸۱، ....

اگه ما جذر عددهایی غیر از اینا رو بخوایم باید از چه روشی استفاده کنیم؟

مثلا فرض کنید که جذر عدد ۷۵ رو میخوایم و ماشین حسابمون هم نمی‌تونه جذر حساب کنه. چکار کنیم؟

گام به گام طبق روش زیر عمل می‌کنیم:

گام ۱ : دو تا عدد پیدا می‌کنیم که مربع کامل باشن و ۷۵ بین اون دو عدد قرار بگیره،

می‌تونیم از اعدادی که در بالا نوشتیم استفاده کنیم. الان ۷۵ بین کدوم دو عدد قرار داره؟ بین ۶۴ و ۸۱ بنابراین:

$$64 < 75 < 81$$

وقتی که ۷۵ بین این دو عدد قرار داره، جذرش هم بین جذر این دو عدد قرار میگیره، یعنی:

$$\sqrt{64} < \sqrt{75} < \sqrt{81}$$

$$8 < \sqrt{75} < 9$$

تا اینجا فهمیدیم که جذر ۷۵ بین دو عدد ۸ و ۹ قرار داره. در قسمت بعد میخوایم بدونیم که جذر ۷۵ به ۸ نزدیکتره یا ۹.

گام ۲ : یه جدول میکشیم و این دو تا عدد و وسط این دو تا عدد رو در اون قرار میدیم:

عدد	۸	۸/۵	۹
مجذور	۶۴		۸۱

گام ۳ . عدد وسطی رو در خودش ضرب می‌کنیم و در سطر دوم می‌نویسیم:

۸/۵ × ۸/۵ = ۷۲/۲۵

۹	۸/۵	۸	عدد
۸۱	۷۲/۲۵	۶۴	مجذور

چون ۷۵ بزرگتر از ۷۲/۲۵ هست بنابراین جذر ۷۵ بین ۸/۵ و ۹ هست.

گام ۳ . عددهای بین ۸/۵ و ۹ رو در سطر اول و مجذور اونها رو در سطر دوم می‌نویسیم.

۹	۸/۹	۸/۸	۸/۷	۸/۶	۸/۵	عدد
۸۱	۷۹/۲۱	۷۷/۴۴	۷۵/۶۹	۷۳/۹۶	۷۲/۲۵	مجذور

گام ۴ : به مجذور اعداد در جدول نگاه می‌کنیم و تعیین می‌کنیم ۷۵ بین کدام دو عدد قرار دارد؟

۷۵ بین ۷۳/۹۶ و ۷۵/۶۹ قرار داره

از این مطلب چه نتیجه ای می‌گیریم؟

چون ۷۵ بین ۷۳/۹۶ و ۷۵/۶۹ قرار داره، بنابراین جذر ۷۵ هم بین ۸/۶ و ۸/۷ قرار داره.

گام آخر: تعیین می‌کنیم که ۷۵ به کدوم یک از عددهای به دست اومده نزدیکتره و جذر اون عدد رو به عنوان جذر تقریبی تعیین می‌کنیم.

چون ۷۵ به ۷۵/۶۹ نزدیکتره، پس جذر ۷۵ رو به طور تقریبی برابر با ۸/۷ در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$\sqrt{75} \cong 8.7$$

مثال:

۲–کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست‌اند؟

$\sqrt{۱۵} < \sqrt{۲۱}$	$\sqrt{۶}$ بین ۵و۷ است	$\sqrt{۵} > ۴$
$\sqrt{۳} > ۲$	$\sqrt{۴۰}$ بین ۵ و ۷ است	$\sqrt{۱۲} < ۴$

وقتی میخوایم دو عدد رو مقایسه کنیم و یکی از اون عددها رادیکالیه، بهتره که عدد دیگه رو هم به رادیکال تبدیل کنیم که دچار اشتباه نشیم.

میخوایم درستی این عبارت رو بررسی کنیم:

$$\sqrt{5} > 4$$

اگه بخوایم ۴ رو به صورت رادیکالی بنویسیم با چه عددی برابره؟

$$4 = \sqrt{16}$$

حالا جاگذاری می‌کنیم:

$$\sqrt{5} > 4 \rightarrow \sqrt{5} > \sqrt{16}$$

الان به راحتی میتونیم بگیم که این رابطه اشتباهه.

قسمت بعد:

به همون روش قبل این رو هم بررسی می‌کنیم:

$\sqrt{12} < 4$

$4 = \sqrt{16}$

$\sqrt{12} < 4 \rightarrow \sqrt{12} < \sqrt{16}$

پس این رابطه درسته.

قسمت بعد:

$\sqrt{6}$ بین ۵ و ۷ است.

در اینجا هم ۷ و ۵ رو به صورت رادیکالی می‌نویسیم:

$5 = \sqrt{25}$

$7 = \sqrt{49}$

آیا $\sqrt{6}$ بین $\sqrt{25}$ و $\sqrt{49}$ قرار داره؟ خیر . چون ۶ از ۲۵ و ۴۹ کوچیکتره. پس این عبارت هم نادرسته.

قسمت بعد:

$\sqrt{40}$ بین ۵ و ۷ است.

مقدار رادیکالی ۵ و ۷ رو در قسمت قبل به دست اوردیم:

$5 = \sqrt{25}$

$7 = \sqrt{49}$

عدد ۴۰ بین ۲۵ و ۴۹ قرار داره بنابراین:

$\sqrt{25} < \sqrt{40} < \sqrt{49}$

قسمت بعد:

$$\sqrt{15} < \sqrt{21}$$

چون ۱۵ از ۲۱ کوچیکتره پس جذر ۱۵ هم از جذر ۲۱ کوچیکتره و این عبارت درسته.

قسمت بعد:

$$\sqrt{3} > 2$$

مقدار رادیکالی ۲ برابره با:

$$2 = \sqrt{4}$$

جاگذاری می‌کنیم:

$$\sqrt{3} > 2 \rightarrow \sqrt{3} > \sqrt{4}$$

بنابراین این عبارت هم نادرسته.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال‌های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam7

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها ، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات امتحانی حل شده، به "ریاضی با هم" بپیوندید.